

الموضوع الأول:التمرين الأول:

- $a$  و  $b$  عددان طبيعيين حيث:  $a \equiv 3 [4]$  و  $b \equiv 2 [4]$ .
- هل العدد  $2a + 5b^3$  يقبل القسمة على 4؟
  - أحسب باقي قسمة العدد  $a^2 - 2b^3$  على 4.
  - تحقق أن:  $a \equiv -1 [4]$ .
  - استنتج باقي قسمة العدد  $a^{1435} \times a^{2016}$  على 4.
  - استنتج أن:  $a^{1435} + a^{2016} \equiv 0 [4]$ .

التمرين الثاني:

- لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$ ، حيث:
- $$u_{12} = 19 \text{ و } u_3 = 1$$
- عين الأساس  $r$  والحد الأول  $u_0$  لهذه المتتالية.
  - أكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$ .
  - عين قيمة  $n$  حتى يكون:  $u_n = 79$ .
  - أحسب بدلالة  $n$  المجموع:  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .
  - استنتج المجموع  $S_{42}$ .

التمرين الثالث:

- نعتبر الدالة  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-2\}$  بـ:
- $$f(x) = 2 - \frac{2}{x+2}$$
- $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- أحسب نهايتي الدالة  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$  ثم فسر النتيجة بيانيا.
  - أحسب نهاية الدالة  $f$  عند  $-2$  ثم فسر النتيجة بيانيا.
  - عين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  وادرس اشارتها.
  - شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  على مجموعة تعريفها.
  - عين إحداثيات نقط التقاطع مع المحاور.
  - أكتب معادلة المماس  $(\Delta)$  لمنحنى الدالة  $f$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0 = 0$ .
  - أرسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .



قال عالم الرياضيات والفيزياء سيمون دونيس:  
في حياتنا شيان مهمان:  
أن نتعلم الرياضيات وأن ندرس الرياضيات.

تصحيح الموضوع الأول:التمرين الأول:

$a$  و  $b$  عددان طبيعيين حيث:  $a \equiv 3 [4]$  و  $b \equiv 2 [4]$ .

- نبحث إن كان العدد  $2a + 5b^3$  يقبل القسمة على 4:  
نقول عن العدد  $2a + 5b^3$  أنه يقبل القسمة على 4 إذا كان:  
 $2a + 5b^3 \equiv 0 [4]$

لدينا:  $a \equiv 3 [4]$

نضرب طرفي الموافقة في العدد (2) ينتج:  $2a \equiv 6 [4]$

وبما أن:  $6 \equiv 2 [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي):  $2a \equiv 2 [4] \dots (1)$

ولدينا:  $b \equiv 2 [4]$

وحسب خواص الموافقات:  $b^3 \equiv 2^3 [4]$

أي:  $b^3 \equiv 8 [4]$

وبما أن:  $8 \equiv 0 [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي):  $b^3 \equiv 0 [4]$

نضرب طرفي الموافقة في العدد (5) ينتج:  $5b^3 \equiv 0 [4] \dots (2)$

بجمع الموافقتين (1) و (2) طرف لطرف ينتج:

$$2a + 5b^3 \equiv 2 [4]$$

ومنه العدد  $2a + 5b^3$  لا يقبل القسمة على 4.

- نحسب باقي قسمة العدد  $a^2 - 2b^3$  على 4:

لدينا:  $a \equiv 3 [4]$

وحسب خواص الموافقات:  $a^2 \equiv 3^2 [4]$

أي:  $a^2 \equiv 9 [4]$

وبما أن:  $9 \equiv 1 [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي):  $a^2 \equiv 1 [4] \dots (3)$

ولدينا مما سبق أن:  $b^3 \equiv 0 [4]$

نضرب طرفي الموافقة في العدد (2) ينتج:  $2b^3 \equiv 0 [4] \dots (4)$

نطرح الموافقة (4) من (3) نجد:

$$a^2 - 2b^3 \equiv 1 [4]$$

ومنه باقي قسمة العدد  $a^2 - 2b^3$  على 4 هو 1.

- نتحقق أن:  $a \equiv -1 [4]$ .

لدينا:  $a \equiv 3 [4]$

نضيف العدد (1) لطرفي الموافقة:  $a + 1 \equiv 3 + 1 [4]$

أي:  $a + 1 \equiv 4 [4]$

وبما أن:  $4 \equiv 0 [4]$

فإن (حسب خاصية التعدي):  $a + 1 \equiv 0 [4]$

نطرح العدد (1) من طرفي الموافقة:  $a + 1 - 1 \equiv 0 - 1 [4]$

ومنه:

$$a \equiv -1 [4]$$

- استنتج باقي قسمة العدد  $a^{1435} \times a^{2016}$  على 4:

لدينا:  $a \equiv -1 [4]$

وحسب خواص الموافقات:  $a^{1435} \equiv (-1)^{1435} [4]$

بما أن العدد 1435 فردي فإن:  $(-1)^{1435} = -1$   
 فنكتب:  $a^{1435} \equiv -1 [4]$   
 أي:  $a^{1435} \equiv 3 [4] \dots (5)$   
 ولدينا:  $a \equiv -1 [4]$   
 وحسب خواص الموافقات:  $a^{2016} \equiv (-1)^{2016} [4]$   
 بما أن العدد 2016 زوجي فإن:  $(-1)^{2016} = 1$   
 فنكتب:  $a^{2016} \equiv 1 [4] \dots (6)$

نضرب الموافقة (5) في الموافقة (6) طرف لطرف نجد:  
 $a^{1435} \times a^{2016} \equiv 3 [4]$   
 ومنه باقي قسمة العدد  $a^{1435} \times a^{2016}$  على 4 هو 3.

(5) استنتاج أن:  $a^{1435} + a^{2016} \equiv 0 [4]$   
 بجمع (5) و (6) طرف لطرف ينتج:  $a^{1435} + a^{2016} \equiv 4 [4]$   
 وبما أن:  $4 \equiv 0 [4]$   
 فإن (حسب خاصية التعدي):

$$a^{1435} + a^{2016} \equiv 0 [4]$$

التمرين الثاني:

نتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$ , حيث:  
 $u_{12} = 19$  و  $u_3 = 1$

(1) نعين الأساس  $r$  والحد الأول  $u_0$  لهذه المتتالية:  
 بما أن  $(u_n)$  متتالية حسابية فإن:

$$\begin{cases} u_3 = u_0 + 3r \\ u_{12} = u_0 + 12r \end{cases}$$

بعد التعويض ينتج:

$$\begin{cases} u_0 + 3r = 1 & (1) \\ u_0 + 12r = 19 & (2) \end{cases}$$

بطرح (1) من (2) طرف لطرف ينتج:

$$\begin{aligned} (u_0 - u_0) + (12r - 3r) &= 19 - 1 \\ 9r &= 18 \end{aligned}$$

أي:  
 ومنه نجد:

$$r = 2$$

نعوض قيمة  $r$  في المعادلة (1) ينتج:  
 ومنه نجد:

$$u_0 = -5$$

(2) نكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$ :

تعطى عبارة الحد العام  $u_n$  لمتتالية حسابية حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$  بالعلاقة التالية:

$$u_n = u_0 + n \times r$$

بعد التعويض والترتيب نجد:

$$u_n = 2n - 5$$

(3) نعين قيمة  $n$  حتى يكون:  $u_n = 79$

نحل  $\mathbb{N}$  في المعادلة:  
 أي:

$$\begin{aligned} u_n &= 79 \\ 2n - 5 &= 79 \end{aligned}$$

ومنه نجد:

$$n = 42$$

حيث:

$$u_{42} = 79$$

(4) نحسب بدلالة  $n$  المجموع:  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$   
 تعطى عبارة المجموع  $S_n$  بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{(الحد الأخير في المجموع + الحد الأول في المجموع)(عدد الحدود)}{2}$$

ويحسب عدد الحدود بالعلاقة التالية:

1 + دليل الحد الأول في المجموع - دليل الحد الأخير في المجموع = عدد الحدود  
 حيث:

- الحد الأول في المجموع هو  $u_0$ .
- الحد الأخير في المجموع هو  $u_n$ .
- عدد الحدود هو  $n + 1$ .

$$S_n = \frac{(n+1)(-5+2n-5)}{2} \quad \text{ومنه:}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(2n-10)}{2} \quad \text{أي:}$$

بعد الاختزال نجد:

$$S_n = (n + 1)(n - 5)$$

(5) استنتاج المجموع  $S_{42}$ :

نعوض  $n = 42$  في عبارة  $S_n$  ينتج:  $S_n = (42 + 1)(42 - 5)$   
 ومنه نجد:

$$S_n = 1591$$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-2\}$  بـ:

$$f(x) = 2 - \frac{2}{x+2}$$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) نحسب نهايتي الدالة  $f$  عند  $-\infty$  وعند  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right) \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x+2}\right) = 0 \quad \text{حيث:}$$

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right) \quad \text{ولدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x+2}\right) = 0 \quad \text{حيث:}$$

ومنه نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

التفسير البياني:

$(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب يوازي حامل محور الفواصل معادلته:  
 $y = 2$

(2) نحسب نهاية الدالة  $f$  عند  $-2$ :

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right)$

بما أن:  $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2) = 0^-$

فإن:  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{2}{x+2}\right) = -\infty$

ومنه نجد:

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$

ولدينا:  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(2 - \frac{2}{x+2}\right)$

بما أن:  $\lim_{x \rightarrow -2^+} (x+2) = 0^+$

فإن:  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{2}{x+2}\right) = +\infty$

ومنه نجد:

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

التفسير البياني:

( $C_f$ ) يقبل مستقيم مقارب يوازي حامل محور الترتيب معادلته:  $x = -2$

(3) نعين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$  وندرس اشارتها:

• حساب  $f'(x)$ :

لدينا:  $f'(x) = 0 - \frac{0(x+2) - 1 \times 2}{(x+2)^2}$

ومنه نجد:

$f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$

• دراسة إشارة  $f'(x)$ :

لدينا:

$\begin{cases} 2 > 0 \\ (x+2)^2 > 0; x \in ]-\infty; -2[ \cup ]-2; +\infty[ \end{cases}$

ومنه:  $\frac{2}{(x+2)^2} > 0; x \in ]-\infty; -2[ \cup ]-2; +\infty[$

جدول الإشارة:

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$\frac{2}{(x+2)^2}$	+		+
$f'(x)$	+		+

من أجل كل  $x$  من  $]-\infty; -2[ \cup ]-2; +\infty[$  لدينا:

$f'(x) > 0$

(4) نشكل جدول تغيرات الدالة  $f$  على مجموعة تعريفها:

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$2$	$+\infty$	$2$

(5) نعين احداثيات نقط التقاطع مع المحاور:

• مع محور الفواصل:

نقط تقاطع المنحنى ( $C_f$ ) مع حامل محور الفواصل هي مجموعة حلول المعادلة:

$f(x) = 0$

نحل في المجال  $]-\infty; -2[ \cup ]-2; +\infty[$  المعادلة:  $f(x) = 0$

أي:  $2 - \frac{2}{x+2} = 0$

ومنه نجد:  $x = -1$

ومنه ( $C_f$ ) يقطع محور الفواصل في النقطة:

$A(-1; 0)$

• مع محور الترتيب:

نقط تقاطع المنحنى ( $C_f$ ) مع حامل محور الترتيب هي مجموعة حلول المعادلة:

$y = f(0)$

لدينا:  $f(0) = 1$

ومنه ( $C_f$ ) يقطع محور الترتيب في النقطة:

$B(0; 1)$

(6) نكتب معادلة المماس ( $\Delta$ ) لمنحنى الدالة  $f$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0 = 0$ :

تعرّف معادلة المماس ( $\Delta$ ) بالعلاقة التالية:

$(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

حيث:

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ f'(0) = \frac{1}{2} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

بعد التعويض نجد:

$(\Delta): y = \frac{1}{2}x + 1$

(7) نرسم ( $\Delta$ ) و ( $C_f$ ):

• لرسم المماس ( $\Delta$ ) يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:

$(\Delta): y = \frac{1}{2}x + 1$

$x$	$-2$	$0$
$y$	$0$	$1$

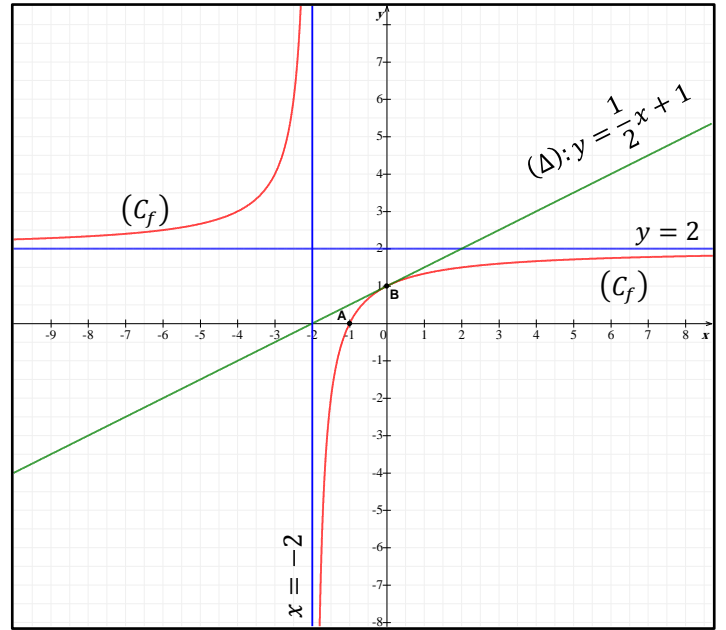
فيصبح المماس ( $\Delta$ ) معرف بالنقطتين  $(-2; 0)$  و  $(0; 1)$ .

• لرسم المنحنى ( $C_f$ ) نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:

- المستقيمات المقاربة للمنحنى ( $C_f$ ).

- نقط تقاطع المنحنى ( $C_f$ ) مع حامل محور الفواصل.

- نقط تقاطع المنحنى ( $C_f$ ) مع حامل محور الترتيب.

المنحنى البياني للدالة  $f$ 